

КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА

Једначина облика $ax^2 + bx + c = 0$, где је x непозната, $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$ је квадратна једначина по x са коефицијентима a, b, c .

НЕПОТПУН ОБЛИК КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

$$\begin{aligned}
 1. \quad & c = 0, a \neq 0 \\
 & ax^2 + bx = 0 \\
 & x(ax + b) = 0 \\
 & x_1 = 0 \quad \vee \quad ax + b = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad x_2 = -\frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & b = 0, a \neq 0 \\
 & ax^2 + c = 0 \\
 & ax^2 = -c \\
 & x^2 = -\frac{c}{a} \\
 & x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} \\
 & x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & b = 0, c = 0, a \neq 0 \\
 & ax^2 = 0 \\
 & x^2 = 0 \\
 & x_{1/2} = 0
 \end{aligned}$$

Примери

$$\begin{aligned}
 1. \quad \text{a)} \quad & x^2 - 2x = 0 \\
 & x(x - 2) = 0 \\
 & x_1 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad x_2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$$

$$\text{в)} \quad \sqrt{2}x^2 + 2x = 0$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \text{a)} \quad & 4x^2 - 121 = 0 \\
 & 4x^2 = 121 \\
 & x^2 = \frac{121}{4} \\
 & x = \pm \sqrt{\frac{121}{4}} \\
 & x_1 = +\sqrt{\frac{121}{4}} \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{121}{4}} \\
 & \qquad \qquad \qquad x_1 = +\frac{11}{2} \quad \vee \quad x_2 = -\frac{11}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad \frac{2}{5}x^2 + \frac{5}{2} = 0$$

$$\text{в)} \quad x - \frac{31}{x} = 0$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \text{a)} \quad & 17x^2 = 0 \\
 & x^2 = 0 \\
 & x_{1/2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad \frac{\sqrt{7}}{2}x^2 = 0$$

$$\text{в)} \quad (1 + \sqrt{23})x^2 = 0$$

Решити квадратне једначине:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & (4x - 6)(4x + 6) = 0 \\
 & (4x)^2 - 6^2 = 0 \\
 & 16x^2 - 36 = 0 \\
 & 16x^2 = 36 \quad \backslash : 4 \\
 & 4x^2 = 9
 \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x_1 = +\frac{3}{2} \quad \vee \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$2. \quad (x - 1)^2 + (x - 3)^2 = (x - 4)^2$$

$$3. \quad \frac{x^2+1}{3} + \frac{2x^2+x}{5} = 1 + \frac{x}{5}$$

$$4. \quad \frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 0 \quad x - 2 \neq 0, x + 2 \neq 0$$

$$x \neq 2, x \neq -2$$

$$\frac{(x+2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = 0, x \neq 2, x \neq -2$$

$$\frac{(x+2)^2 + (x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = 0, x \neq 2, x \neq -2$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4x + 4}{(x-2)(x+2)} = 0, x \neq 2, x \neq -2$$

$$\frac{2x^2 + 8}{(x-2)(x+2)} = 0, x \neq 2, x \neq -2$$

Посматрамо сада броилац када је једнак нули

$$2x^2 + 8 = 0, x \neq 2, x \neq -2$$

$$2(x^2 + 4) = 0$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i$$

$$5. \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{3x^2-2}{x^2-1} \quad x-1 \neq 0, x+1 \neq 0$$

$$x \neq 1, x \neq -1$$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - \frac{3x^2-2}{x^2-1} = 0, \quad x \neq 1, x \neq -1$$

$$\frac{(x+1)^2 + (x-1)^2 - (3x^2-2)}{x^2-1} = 0, \quad x \neq 1, x \neq -1$$

$$\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1-3x^2+2}{x^2-1} = 0, \quad x \neq 1, x \neq -1$$

$$\frac{-x^2+4}{x^2-1} = 0, \quad x \neq 1, x \neq -1$$

Посматрамо сада броилац када је једнак нули

$$-x^2 + 4 = 0, \quad x \neq 1, x \neq -1$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Задатци за вежбање (Венова збирка) 416, 417, 419, 420

(Кругова збирка) 149-152

ПОТПУНИ ОБЛИК КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Образац за решавање квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a, b, c \neq 0$ гласи

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. $x^2 - 4x - 5 = 0$
 $a = 1, b = -4, c = -5$

$$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+6}{2} \vee x_2 = \frac{4-6}{2}$$

$$x_1 = 5 \vee x_2 = -1$$

2. $x^2 - 6x + 9 = 0$
 $a = 1, b = -6, c = 9$

$$x_{1/2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{6}{2}$$

$$x_1 = x_2 = 3$$

3. $x^2 - 4x + 5 = 0$
 $a = 1, b = -4, c = 5$

$$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$x_1 = \frac{2(2+i)}{2} \vee x_2 = \frac{2(2-i)}{2}$$

$$x_1 = 2 + i \vee x_2 = 2 - i$$

комлексан број коњуговано комплексан број

Реши квадратне једначине:

4. $2z^2 + 5z - 3 = 0$

5. $t^2 - t - 6 = 0$

6. $4y^2 - 17y + 4 = 0$

Одредити скуп решења квадратне једначине:

$$7. \frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{8}{x^2-4} \quad x-2 \neq 0, x+2 \neq 0$$

$$x \neq 2, x \neq -2$$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} = 0, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

$$\frac{x \cdot (x+2)}{x^2-4} - \frac{3 \cdot (x-2)}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-4} = 0, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

$$\frac{x^2+2x-3x+6-8}{x^2-4} = 0, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-4} = 0, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

Посматрамо сада броилац када је једнак нули

$$x^2 - x - 2 = 0, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

$$a = 1, b = -1, c = -2$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} \vee x_2 = \frac{1-3}{2}, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

$$x_1 = 2 \vee x_2 = -1, \quad x \neq 2, x \neq -2$$

Због услова решење $x_1 = 2$ не може бити решење полазне једначине,

дакле решење једначине је $x_2 = -1$

$$8. \frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+2} = \frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$$

$$9. 1 + \frac{x-1}{x+2} + \frac{1}{x} = \frac{3x+2}{x(x+2)}$$

$$10. \frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x}$$

$$11. \frac{34}{4x^2-1} + \frac{2x+1}{1-2x} = \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$12. \frac{x+1}{x^2-3x} + \frac{x}{2x^2-18} - \frac{2x-3}{x^2+3x} = \frac{18}{10x-30}$$

Решити једначине:

$$13. 2x^2 - 5x - 3|x-2| = 0$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x-2 \geq 0, x \geq 2 \\ -(x-2), & x-2 < 0, x < 2 \end{cases}$$

за $x < 2$

$$2x^2 - 5x - 3(-(x-2)) = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3(x-2) = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3x - 6 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 6 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -3$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \vee x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

за $x \geq 2$

$$2x^2 - 5x - 3(x-2) = 0$$

$$2x^2 - 5x - 3x + 6 = 0$$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$a = 1, b = -4, c = 3$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} \vee x_2 = \frac{4-2}{2}$$

$$x_1 = 4 \vee x_2 = 1$$

$$14. 2x|x-3| + |x+5| = 0$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x-3 \geq 0, x \geq 3 \\ -(x-3), & x-3 < 0, x < 3 \end{cases} \quad |x+5| = \begin{cases} x+5, & x+5 \geq 0, x \geq -5 \\ -(x+5), & x+5 < 0, x < -5 \end{cases}$$

$x-3$	-	-	+
$x+5$	-	+	+
$-(x-3)$	-	-	$x-3$
$-(x+5)$	-	+	$x+5$

$$1) \quad x \in (-\infty, -5)$$

$$-2x(x-3) - (x+5) = 0$$

$$-2x^2 + 5x - 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{-4}$$

нема реалних решења

$$2) \quad x \in [-5, 3)$$

$$-2x(x-3) + (x+5) = 0$$

$$-2x^2 + 7x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{89}}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{89}}{-4} = \frac{7 - \sqrt{89}}{4} \approx -0,60$$

$$x_2 = \frac{-7 - \sqrt{89}}{-4} = \frac{7 + \sqrt{89}}{4} \approx 4,10 \notin [-5, 3)$$

$$3) \quad x \in [3, \infty)$$

$$2x(x-3) + (x+5) = 0$$

$$2x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{-4}$$

нема реалних решења

једино решење једначине је

$$x = \frac{7 - \sqrt{89}}{4}$$

$$15. |x-1| \cdot |x+2| = 4$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0, x \geq 1 \\ -(x-1), & x-1 < 0, x < 1 \end{cases} \quad |x+2| = \begin{cases} x+2, & x+2 \geq 0, x \geq -2 \\ -(x+2), & x+2 < 0, x < -2 \end{cases}$$

$x-1$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
$-(x-1)$	-	-	$x-1$
$-(x+2)$	-	+	$x+2$

$$1) \quad x \in (-\infty, -2)$$

$$(-(x-1)) \cdot (-(x+2)) = 4$$

$$(x-1) \cdot (x+2) = 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 2 \notin (-\infty, -2)$$

$$2) \quad x \in [-2, 1)$$

$$-(x-1) \cdot (x+2) = 4$$

$$-x^2 - x - 2 = 0 \quad \backslash : -1$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

нема реалних решења

$$3) \quad x \in [1, \infty)$$

$$(x-1) \cdot (x+2) = 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = -3 \notin [1, \infty)$$

$$x_2 = 2$$

решења дате једначине су $\{-3, 2\}$

Задатци за вежбање (Венова збирка) 422, 423, 424, 443 - 455

(Кругова збирка) 156-159